ЛИТЕРАТУРА

1. Habibullin I., Zheltukhina N., Pekcan A. *Complete list of Darboux integrable chains* // J. Math. Phys. – 2009. – V. 50. – P. 102710.

2. Багдерина Ю. Ю. *Эквивалентность обыкновенных дифференциальных уравнений* $y'' = R(x,y)y'^2 + 2Q(x,y)y' + P(x,y)$ // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43. – № 5. – С. 581-589.

3. Адлер В. Э., Старцев С. Я. *О дискретных аналогах уравнения Лиувилля* // ТМФ. – 1999. – Т. 121. – № 2. – С. 271-284.

Т. Е. Бадокина

Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, bad_zip1@mail.ru

ДИВЕРГЕНЦИЯ УПРУГО ОПЕРТОЙ УДЛИНЕННОЙ ПЛАСТИНЫ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

Методами [1] исследуется задача о прогибах тонкой гибкой удлиненной пластины ширины d на упругом основании в сверхзвуковом потоке газа. Рассматриваются стационарные решения системы малых прогибов крыла, т. е. задача о дивергенции тонкого крыла ширины d, и два вида граничных условий:

B) левый край свободен, правый жестко закреплен:
$w''_{x^2}(0) = w'''_{x^3}(0) = 0, \quad w(1) = w'_x(1) = 0;$

B$'$) левый край жестко закреплен, правый — свободен:
$w(0) = w'_x(0) = 0 \quad w''_{x^2}(1) = w'''_{x^3}(1) = 0.$

В безразмерных переменных задача описывается уравнением

$$\left(\frac{Dw''}{\sqrt{(1+w'^2)}^3}\right)+\beta_0 w=\theta w''\int_0^1[(1+w'^{\frac{1}{2}})-1]dx+$$
$$+k\left\{\left[1+\frac{\kappa-1}{2}Mw_x\right]^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}-\left[1-\frac{\kappa-1}{2}Mw_x\right]^{\frac{2\kappa}{\kappa-1}}\right\} \quad (1)$$

с граничными условиями B и B$'$. Здесь $w = w(x)$ — прогиб пластины полосы, $0 \leqslant x_1 \leqslant d$, $-\infty < y_1 < \infty$, $x = x_1/d$, $0 < x < 1$ — прямоугольные координаты.

Линеаризованное уравнение (1) будет иметь вид

$$\chi^2 w_{x^4}^{(4)} + \sigma w'_x + \beta_0 w = 0 \quad (2)$$

с характеристическим уравнением

$$\lambda^4 + a\lambda + b = 0, \quad \text{где} \quad a = \frac{\kappa k M}{\chi^2}, \quad b = \frac{\beta_0}{\chi^2}.$$

Отделение корней выполнено по известному методу Штурма. При исследовании 2-х точечной граничной задачи с условиями B (2) возникают следующие возможности. Случай 1 : $D = 256b^3 - 27a^4 > 0$, корнями характеристического уравнения будут 2 пары комплексно-сопряженных чисел $-\gamma\pm\delta_1 i$ и $\gamma\pm\delta_2 i$, $\gamma > 0$, $\delta_2 > \delta_1 > 0$. Случай 2 : $D < 0$. Здесь метод Штурма показывает существование 2-х отрицательных корней $-\alpha_1$, $-\alpha_2$ и пары комплексно-сопряженных корней $\gamma \pm \delta i$. Фредгольмовость оператора доказана построением стандартными методами функции Грина [3].

Следует сказать, что в известном справочнике по функциям Грина задач механики отмечено, что функция Грина для задач аэроупругости пока не построена [1]. Укажем здесь на наши предшествующие работы [4], [5], содержащие функции Грина для линеаризованной задачи аэроупругости

$$\chi^2 w^{(4)}_{x^4} - T w^{(2)}_{x^2} + \sigma w^{(1)}_x = 0$$

с граничными условиями B и B$'$.

Определитель граничных условий для первого случая

$$\begin{aligned}\Delta_B = \gamma^6 \Big\{ & 2\sqrt{1-u^2}[(u^2+4)\operatorname{ch} 2\gamma - 2u \operatorname{sh} 2\gamma] + \\ & + 2\sqrt{1-u^2}(u^2+12)\cos\gamma\sqrt{1-u}\cos\gamma\sqrt{1+u} + \\ & + u(2-u)\sqrt{1-u}\cos\gamma\sqrt{1-u}\sin\gamma\sqrt{1+u} + \\ & + 4u(u+2)\sqrt{1+u}\sin\gamma\sqrt{1-u}\cos\sqrt{1+u} + \\ & + 2(4-u^2)\sin\gamma\sqrt{1-u}\sin\gamma\sqrt{1+u}\Big\},\end{aligned}$$

где $u = \sqrt{4 - \frac{b}{\gamma^4}}$, $\delta_1^2 = \gamma^2(1-u)$, $\delta_2^2 = \gamma^2(1+u)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$. Отсутствие дивергенции в первом случае доказана с помощью разложения функций в ряды.

Определитель граничных условий для второго случая

$$\begin{aligned}\Delta = 4\gamma^6 \Big\{ & \sqrt{u^2-1}[(4+u^2)\operatorname{ch} 2\gamma - 4u \operatorname{sh} 2\gamma] + \sin\gamma\sqrt{u+1} \times \\ & \times [(4-u^2)\operatorname{sh}\gamma\sqrt{u-1} + 2u(2-u)\sqrt{u-1}\operatorname{ch}\gamma\sqrt{u-1}] + \\ & + [2u(2+u)\operatorname{sh}\gamma\sqrt{u-1} + (12+u^2)\sqrt{u-1}\operatorname{ch}\gamma\sqrt{u-1}] \times \\ & \times \sqrt{1+u}\cos\gamma\sqrt{1+u}\Big\},\end{aligned}$$

где $\alpha_1 = \gamma(1+\sqrt{u-1})$, $\alpha_2 = \gamma(1-\sqrt{u-1})$, $u = \sqrt{4 - b\gamma^{-4}}$, $1 \leqslant u \leqslant 2$. Для второго случая показано наличие дивергенции.

Определены базисные элементы подпространства нулей прямой и сопряженной задач. Построено уравнение разветвления и вычислена асимптотика разветвляющихся решений в окрестности точек бифуркационных кривых.

Теми же методами бифуркационные параметры выражены через корни характеристичекого уравнения, решена задача о дивергенции удлиненной пластины с граничными условиями B′.

ЛИТЕРАТУРА

1. Melnikov Yu. A. *Influence functions and matrices.* – Ser. Text and Reference Books Mech. Engng. – M. Dekker, 1999. – V. 119. – 469 p.

2. Petrov K. M., Tsyganov A. V., Loginov B. V. *On the divergence stability loss of elongate plate in supersonic gas flow subjected to compressing or extending stresses* // Известия ИГУ. – 2007. – Т. 1. – № 1. – С. 212-235.

3. Наймарк М. А. *Линейные дифференциальные операторы.* – М.: Наука, 1969. – 528 с.

4. Badokina T. E., Loginov B. V., Makeeva O. V. *Green functions for boundary value problems about divergence of elongated plate in aeroelasticity* // 80-th GAMM-2009. Abstracts. CD. Gdansk, Poland, 9 – 13.02.2009. – P. 33-44.

5. Badokina T. E., Loginov B. V., Makeeva O. V. *Green functions for boundary value problems about divergence of elongated plate in aeroelasticity* // PAMM V.9 80-th GAMM Jahrestagung 9 – 13.02.2009. Gdansk, Poland. – P. 525-526.